DIRICHLET
ELOGIO
DI C. G JACOB J COBI
VITTORIO EM. III

Al suo carissimo amico C. [illegible]
G. Novi
SBN 678359

ELOGIO

DI

CARLO GUSTAVO JACOB JACOBI

LETTO

NELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI BERLINO

IL 1° DI LUGLIO 1852

DA LEJEUNE DIRICHLET

TRADUZIONE DAL TEDESCO

DI GIOVANNI NOVI

PROFESSORE DI MECCANICA, E DI ARTIGLIERIA NEL LICEO MILITARE
DI FIRENZE.

ESTRATTA DAGLI ANNALI
DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
PUBBLICATI IN ROMA
SETTEMBRE ED OTTOBRE 1856.

BIBLIOTECA PROVINCIALE di NAPOLI 1818

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI
1856

Digitized by Google

CONSIDERAZIONI

SUGLI ELOGI ACCADEMICI.

L'elogio di Jacobi dettato da Lejeune Dirichlet ci offre opportunità di esporre taluni nostri pensieri intorno a siffatto argomento. È quistione agitata dai critici se un elogio accademico debba svolgere solo la vita intellettuale dell'uomo che toglie a celebrare, ovvero la vita morale e pubblica altresì; in breve, se dev'essere una dissertazione o una biografia. Taluni vorrebbero proscrivere dall'elogio qualunque cosa non atta a ritrarre lo scienziato; altri starebbero contenti a dipingere l'uomo, toccandone appena di volo i trovati scientifici. Quanto a noi, diremo subito che reputiamo affatto erronea questa seconda opinione; perocchè dov'ella prevalesse, mancherebbe affatto la materia per iscrivere la vita di molti uomini eminenti. Dirichlet avrebbe dovuto restar muto innanzi alle ceneri di Jacobi; Arago non osare parlarci di Poisson; Condorcet non dettare più di una pagina intorno ad Eulero! E non meno erronea ci sembra la prima opinione, comecchè sostenuta da nomi autorevoli. D'Alembert fin dai suoi tempi si esprimeva a questo modo: *C'est par les actions qu'il faut louer ceux qui le méritent; l'éloge d'un Homme de Lettres doit donc être le récit de ses travaux. Mais il est peut-être aussi utile de faire connaître ce qu'il a été, et de peindre l'homme en même tems que l'écrivain, au risque de changer quelquefois le panégyrique en histoire. En montrant d'un côté aux Lecteurs instruits ce que les Sciences ou les Lettres doivent à celui qu'on loue, le point où il les a trouvées, et celui où il les a laissées par ses veilles, on intéressera de l'autre les Lecteurs philosophes par le contraste ou par l'accord de ses écrits et de ses mœurs.*

Un critico francese di molta reputazione, Sainte-Beuve, moveva lamento che Arago di troppi particolari empiesse i suoi Elogi, e di cose affatto estranee alla scienza gl'ingombrasse. A pigliare elogio per elogio potremmo mostrare, volendo, come i particolari onde abbondano non sono mai troppi nè oziosi, e muovono sempre da alto intento. Quando un uomo insigne, come l'Autore del *Genio del Cristianesimo*, chiama il creatore della Geometria descrittiva *uomo vilissimo e servile*, può il biografo di Monge, persuaso della dignità del suo ufficio, rimanere indifferente

Digitized by Google

innanzi a cotesta accusa, e non cercare con ogni mezzo a purgarne la memoria dell'uomo onde ha tolto a favellare? Allorchè la volgare opinione taccia Carnot di complicità nei casi sanguinosi del Comitato di Salute Pubblica, chi riputerà troppi i particolari coi quali l'eminente Segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze di Parigi cerca lavare l'autore della Geometria di Posizione da cotale macchia? Qual critico oserà biasimare per troppa lunghezza la mirabile biografia di Condorcet, quando per essa la severa e nobile figura dell'illustre amico di Turgot e di Voltaire pura si manifesta dalle vili calunnie onde l'aveva bruttata l'ira cieca dei partiti? Ma queste son cose affatto estranee alla scienza, voi dite. Sì, gli è vero; ma pretendete forse separare lo scienziato dall'uomo? Questo divorzio, innaturale sempre, sarebbe assurdo quando si parla di uomini che non sono vissuti solamente nel ritiro degli studi, ma hanno operato e partecipato ai moti civili del loro tempo, e, più o meno, tenutovi grado importante. Nè vale che taluno ci metta innanzi l'autorità, dicerto gravissima, di Fourier, il quale dettando l'elogio di Laplace diceva: *Qu'importe à la postérité, qui aura tant d'autres détails à oublier, d'apprendre ou non que Laplace fut quelque instant ministre d'un grand État?* A noi pare questo un concetto non giusto nè in tutto degno dell'alta mente che compose la Teoria matematica del calore. Quando Laplace, ministro di un grande Stato, si risovveniva della vedova oscura e derelitta dell'illustre Bailly (che scontò sul patibolo l'amore del suo paese e il culto della scienza) e di conveniente pensione la provvedeva, sarebbe stato assai ingiusto non rammentare una particolarità che tanto onore cresceva al suo nome. E dello stesso Laplace qual dei suoi biografi vorrebbe trasandare l'interessante aneddoto raccontato da Biot, e che sì bellamente conferisce alla fama dell'immortale continuatore di Newton?[1]

[1] L'aneddoto cui alludo è il seguente: Eulero ed altri geometri avevano con varii metodi tentata la soluzione de' problemi nei quali trattavasi di scoprire la natura di una curva, per via di certe date relazioni, i cui caratteri geometrici erano di ordine diverso: le une dovendo aver luogo tra punti infinitamente vicini, le altre tra punti distanti l'uno dall'altro per differenze finite e date di ascisse. A Biot venne fatto di trovare un metodo generale per risolvere tutte le quistioni simili, per via di un genere di equazioni dette a *differenze miste*, in allora poco studiato. Egli, in quel tempo giovanissimo e professore alla scuola centrale di Beauvais, essendo già in relazione con Laplace (si era offerto correttore di stampa per la sua Meccanica celeste che si veniva stampando), credette opportuno, prima di pubblicare il risultato delle sue ricerche, di farne parola all'illustre matematico. *Il m'écouta*, dice Biot, *avec une attention qui me sembla mêlée de quelque surprise. Il me questionna sur la nature de mon procédé, sur les détails de mes solutions. Quand il m'eut examiné sur tous ces points « Cela me paraît fort bien*, dit-il; *venez demain m'apporter votre mémoire. Je serais bien aise de la voir.* » La dimane, dopo avere attentamente letto il lavoro di Biot, e dopo averlo molto lodato, Laplace lo consigliò a sopprimere talune considerazioni troppo spinte, con le quali quella Memoria terminava. Biot, dopo una piccola discussione si arrese al parere del grande geometra, e il giorno seguente

Se **Arago** e **Cousin**, nell'elogio di Fourier, si fossero governati colla medesima massima che questi enunciava in occasione di Laplace, i posteri avrebbero ignorato che il celebre Matematico di Auxerre fu anche amministratore intelligente, e che, messo a capo alla direzione politica di un dipartimento avverso al governo napoleonico, vi si condusse con prudenza sì mirabile e sì rara in tempi pieni di agitazioni e di subiti mutamenti, da sorprendere lo stesso Buonaparte; il quale, interrogato Fourier come avesse potuto conciliare animi così ostinati, n'ebbe per risposta: *Rien de plus simple: je prends l'épi dans son sens, au lieu de le prendre à rebours.*

Secondo il nostro parere l'elogio di uno scienziato deve contenere primamente una larga e sapiente esposizione dei trovati, onde a lui va debitrice la scienza, e poscia una sottile ed accurata narrazione di ciò che fosse l'uomo fuori il giro delle investigazioni intellettuali. Fontenelle fu elogiatore eloquente ed elegante, ma non raggiunse la desiderata eccellenza nè quando tolse ad effigiare lo scienziato, nè quando si propose ritrarre l'uomo. In lui ammirerai facondia di dettato impareggiabile, ma non ti verrà fatto scorgere con chiarezza e precisione il posto che occupano le scoperte di cui parla nella storia della scienza, nè il loro legame con le ricerche antecedenti e contemporanee. Nel bellissimo elogio di Leibnitz, per esempio, troverai dato al geometra di Lipsia il titolo d'inventore del Calcolo differenziale, e con qualche larghezza narrata la celebre polemica corsa fra lui e i seguaci di Newton; ma non saprai come cotesta scoperta, che tutta rinnovellò la speculazione matematica, si col-

presentò il suo lavoro emendato all'Istituto. Erano presenti alla lettura che ne fece, Laplace, Lagrange, Monge, il generale Buonaparte (Biot dice che aveva più paura di Lagrange che di quest'ultimo; vi mancavano pochi giorni al 18 brumaio). A lettura finita ricevette le congratulazioni di *tutti*. I commissarii destinati ad esaminare il suo lavoro furono i *cittadini* Laplace, Buonaparte *e* Lacroix. Laplace invitò Biot a desinare in sua casa, *e* mentre si apprestava il pranzo lo condusse nel suo studio. *Nous étant assis*, racconta Biot, *et moi prêt à l'écouter, il sort une clef de sa poche, ouvre une petite armoire placée à droite de sa cheminée, je la vois encore . . . . .; puis il en tire un cahier de papier jauni par les années, où il me montra tous mes problèmes, les problèmes d'Euler, traités et résolus par cette méthode, dont je croyais m'être le premier avisé. Il l'avait trouvée aussi depuis longtemps; mais*]*il s'était arrêté devant ce même obstacle qu'il m'avait signalé.* Dopo aver notato che questa scoperta non avrebbe aggiunto nuovo lustro al nome di Laplace già sì grande, Biot soggiunge: *Mais l'abnégation scientifique est difficile et rare, même en des petites choses. Et puis, cette délicatesse à ne me vouloir découvrir ce mystère qu'après le succès public, auquel il m'avait conduit comme par la main, ne se servant de ce qu'il avait vu que pour me détourner des écueils où mon inexpérience allait m'engager!* Il fatto qui riferito ritrae la sua maggiore importanza da questo che rivela in Laplace una generosità d'animo da molti negatagli. E invero in una nota all'elogio di Fourier dettato da Cousin troviamo le seguenti parole: *Je crus m'apercevoir qu'il* (Fourier) *n'aimait guère Laplace. Il paraît qu'il avait eu à s'en plaindre, et il me dit plusieurs fois, ce que d'autres m'ont aussi répété, que Laplace avait beaucoup fait sans doute, mais qu'il voulait avoir tout fait ou tout inspiré.*

leghi colle cognizioni antecedenti, e di quanta e quale importanza essa fosse stata. Fontenelle dice solamente: *C'est une science toute nouvelle, née de nos jours, très-étendue, très-subtile et très-sûre.* D'Alembert e Condorcet, se meno eloquenti e meno eleganti, furono però espositori più compinti e più larghi. Fourier nella parte scientifica raggiunge altezza singolare; classifica le scoperte con sapiente ordine, e le apprezza con profondità di giudizio; sicchè tra le sue mani l'esposizione di verità astratte diventa storia piena di utili insegnamenti e di grande efficacia. Per Arago l'elogio è, direi, una cattedra dalla quale egli con alto magistero e con mirabile evidenza espone la storia di un ramo della scienza; ti fa assistere alla genesi delle scoperte, ti guida a traverso il laberinto dei pensieri direttivi con passo sicuro e per via d'indagini adeguate, di nuova luce vestendo le dottrine più astruse. E se l'uomo ch'ei celebra fu dalle vicende dei tempi travolto negli eventi della vita pubblica, Arago non disgrega i fatti, ma accuratamente li ricompone e ne mette a rilievo i particolari, col nobile intendimento di difendere la scienza e i suoi cultori dalle ingiuste accuse, onde troppo spesso sono stati fatti bersaglio.[1]

L'Elogio di Jacobi, di cui offriamo la traduzione agli Italiani, è lavoro stupendo nel suo genere. Il pensiero di accoppiare all'esposizione dei lavori di Jacobi quella di Abel è felicissimo. Nel quadro che ne fa l'Autore, le due figure di Abel e di Jacobi vi grandeggiano egualmente, e l'una non che rappicciolirsi a fronte dell'altra se ne avvantaggia. La parte scientifica offre un modello del come dovrebbe essere scritta la storia delle matematiche moderne; modello non facilmente imitabile, perchè richiede profonda cognizione del soggetto e perspicacia grande. Il ritratto dell'uomo vi è tracciato con sobrietà di linee e con evidenza di colori. Una lettera mirabile di Jacobi ti rivela le sue lotte, i suoi dolori, le sue gioie, le sue norme di giudicare sè e gli altri. Ai giovani si farà sempre più manifesto da questa lettera che anche l'uomo dotato di grande ingegno non può toccare eccelsa meta senza gravi fatiche, e quindi essere mere jattanze i facili trionfi nel campo speculativo. Se la lettura di questa dotta biografia contribuirà a rendere più vivo in Italia l'amore delle dottrine matematiche, io mi terrò pago della modesta fatica che ho durata nel tradurla.

[1] Se taluno volesse far rimprovero ad Arago di avere forse in qualche caso proceduto troppo oltre in questa difesa, noi gli ricorderemo le belle parole di Macaulay: *There is scarcely any delusion which has a better claim to be indulgently treated than that under the influence of which a man ascribes every moral excellence to those who have left imperishable monuments of their genius.* Critical and Hist. Essays; vol. 5, pag. 2.

ELOGIO DI CARLO GUSTAVO JACOB JACOBI

Facendomi ad esporre le scoperte scientifiche del più gran matematico, che dopo Lagrange, abbia fatto parte di questa Accademia, qual socio residente, vedo le gravi difficoltà del mio assunto. Imperocchè si tratti di mostrare tutta l'importanza della elucubrazioni di tale che, avendo percorsa in quasi tutti gli aspetti una scienza già accresciuta da duemila anni di lavoro perseverante, ha escogitato e chiarito, colla sola potenza del suo ingegno creatore, verità importanti e recondite, e di nuovi concetti ha arricchito il patrimonio scientifico, elevando ad alto grado la speculazione matematica. Per quietare l'esitazione che in me produce la coscienza della mia insufficienza, basterò, spero, l'essere convinto che un debito sacro di riconoscenza è giusto si paghi verso tali servigi resi alla scienza e ai suoi cultori. E niuno più di me è in obbligo di soddisfare a questo debito, dacchè se molto fu il profitto che in comune coi miei coetanei trassi dalle scientifiche produzioni del Jacobi, non minore fu quello che derivai dall'intimo commercio che per anni parecchi mi ebbi col grande pensatore.

Carlo Gustavo Jacob Jacobi nacque in Potsdam il 10 decembre 1804 da agiato negoziante. Più che a maestro ebbe a guida nello studio delle lingue antiche e delle matematiche elementari, lo zio materno Sig. Lehmann, sotto la cui sapiente direzione fece sì rapidi progressi, che di dieci anni neppur

compiuti fu ammesso nella seconda classe del Ginnasio di Potsdam, e dopo sei mesi nella prima, e vi rimase in tutto non più che quattro anni per aspettare l'età necessaria a frequentare l'università. Quivi l'insegnamento matematico era praticato come semplice esercizio di memoria; sicchè poco ne restava appagato il giovane allievo, le cui relazioni col maestro furono perciò, per assai tempo , alquanto spiacevoli. Infine il maestro fu abbastanza giudizioso per non contrariare lo straordinario scolare e permettere che questi passasse allo studio dell'*Introductio* di Eulero, mentre gli altri penosamente erano rimasti a recitare proposizioni elementari. E quanto fin d'allora progredito fosse il suo ingegno lo mostra il tentativo che fece di risolvere l'equazione di 5° grado, tentativo di che tenne parola in una sua Memoria posteriore.

Parecchi di quelli che poscia hanno levato grido, sperimentarono le prime loro forze intorno a questo problema; il quale, innanzi che ne venisse dimostrata l'impossibilità, doveva attirare singolarmente gl'ingegni nascenti sì per la celebrità acquistata a causa di tanti sforzi infruttuosi, e sì ancora perchè confinando cogli elementi , sembrava agevole senza molte cognizioni.

Nella nostra università Jacobi passò il suo tempo fra gli studii filosofici, filologici e matematici. Qual'assistente agli esercizii del Seminario filologico, risvegliò l'attenzione del nostro collega Böckh , presidente di questo Istituto , che l'ebbe assai caro pel suo ingegno acuto e singolare, e gli proseguì sempre particolar benevolenza.

Sembra che frequentasse meno le lezioni matematiche , le quali nella nostra università erano allora troppo elementari da poter riuscire di alcun giovamento a Jacobi , già molto innanzi nello studio delle Opere principali di Eulero e di Lagrange. Con maggior zelo però studiò la letteratura matematica , anelando farsi un' idea generale dei

grandi tesori scientifici contenuti nelle raccolte accademiche. Jacobi, il cui ingegno non poteva restringersi a raccogliere cognizioni e mosso potentemente dal bisogno di far sue le cose che leggeva, e interamente padroneggiarle venne nella determinazione, dopo due anni di studii universitarii, di rinunziare alla filologia o alla matematica. E poichè codesta determinazione ebbe conseguenze assai importanti, non solamente per lui, ma altresì per la scienza alla quale d'allora in pòi si consacrò interamente, si udranno volentieri le ragioni ch'ei medesimo ne adduceva allo zio; al quale così scriveva :

« Non posso senza pena rinunziare allo studio della filologia , dopochè mi è riuscito intravedere la più riposta magnificenza della vita ellenica. Pure mi è forza di farlo. Lo smisurato colosso che hanno innalzato i lavori di Eulero, Lagrange, Laplace richiede forza prodigiosa di mente, assidua meditazione e ardore alieno da ogni riposo, se vuolsi penetrare la intima natura di quello e dominarlo, affine di non dover temere ad ogni istante di esserne schiacciato. Solo quando ci siamo impadroniti del suo spirito, possiamo lavorare tranquillamente a perfezionare le singole sue parti, e la grande opera con energia condurre a compimento.»

Per la dissertazione del dottorato, Jacobi prescelse la decomposizione delle frazioni algebriche ; soggetto già più volte tolto ad argomento di studii. In questo lavoro egli dimostra una formola notabile, data da Lagrange senza dimostrazione nelle Memorie della nostra Accademia. Poi dà una nuova maniera di decomposizione, la quale non è completamente determinata, come quella esclusivamente considerata sin'allora, e conchiude la Memoria con talune ricerche sulla trasformazione delle serie, nelle quali si mostra già un nuovo principio, di cui si giovò spesso in posteriori lavori.

Conseguito il titolo di dottore e resosi abile all'insegnamento, Jacobi fece all'università una lezione sulla teoria

delle superficie curve e delle curve nello spazio. Secondo la testimonianza di tale che fu presente a quella lezione, l'ingegno magistrale di Jacobi apparve fin d'allora singolare, avendo egli svolto il suo tema con gran chiarezza e in modo da interessare assai la sua scolaresca. Il ventenne maestro fece anche mostra di una precoce maturità di giudizio quando, non sgomento dal discredito nel quale era caduto in quel tempo, per influsso d'un nome autorevole, il metodo degl'infinitamente piccoli, seguì nella sua esposizione appunto codesto metodo, adoperandosi con successo a persuadere ai suoi uditori come il medesimo non differisce da quello rigoroso degli antichi, se non per la sua forma abbreviata, via indispensabile a tutte le ricerche più complicate.

L'attenzione che Jacobi cominciò a risvegliare, indusse le autorità superiori dell'istruzion pubblica ad invitarlo a continuare provvisoriamente le sue lezioni in qualità di professore particolare (aggregato) a Koenisberg; dove, per la cattedra di matematica divenuta allora per l'appunto vacante, si offrivano al merito di lui maggiori speranze di premio che non a Berlino.

Fatto importante per la carriera scientifica di Jacobi nel suo soggiorno a Koenisberg fu la conoscenza personale ch' ei fece del grande astronomo Bessel, e il trovarsi per la prima volta in contatto con un uomo di genio in una scienza così strettamente collegata con la sua. E comecchè egli fosse già fin da giovane abituato al faticoso e sodo studiare, pure la vista diuturna dell'operosità instancabile di questo uomo straordinario esercitò sopra di lui tale una potenza di abiti studiosi, la quale ei stesso ricordò poi sovente, e con riconoscenza.

In quanto a quella parte della vita del Jacobi considerato come scrittore ed autore, fu per lui una buona ventura l'essere esordito su questo terreno quando appunto si

veniva fondando quel Giornale matematico, per la cui pubblicazione il nostro collega *Crelle* acquistò nome tanto grande e duraturo, sì per avere aiutato alla diffusione delle matematiche discipline, e sì ancora per aver dato nuovo impulso allo studio di esse. Jacobi, che fu tra i primi collaboratori del Giornale, vi è rimasto fedele sino alla sua morte; e tranne le due opere particolari « *Fund. nova* » e « *Canon arith.* », quasi a tutti gli altri suoi lavori fu sola palestra il giornale di Crelle.

Le prime Memorie di Jacobi lo mostrano già di buon' ora perfetto matematico; sia che egli esamini con criterii nuovi o più semplici dottrine già conosciute, come ha fatto nelle Note « *Sul metodo di Gauss per la determinazione approssimata degl'Integrali definiti* » e *Sul metodo di Pfaff per l'integrazione dell'equazioni a differenze parziali* »; sia che svolga problemi non ancora risoluti, e pervenga a nuovi risultati. Tra i lavori dell'ultima specie, due sono degni di particolare menzione: una Memoria di poche pagine, nella quale trova una proprietà fondamentale, rimasta per lo innanzi ignota, della notabile funzione; che, introdotta per la prima volta da Legendre nella scienza, ha poscia avuto sì gran parte in tutte le posteriori ricerche sull'attrazione: e un'altra Memoria « *Sopra i resti cubici* », la quale contiene a dir vero il solo enunciato delle proposizioni senza dimostrazioni, ma le proposizioni son tali da non potersi reputare trovate per induzione, e per conseguenza non lasciano dubbio che l'autore fin d'allora fosse già in possesso di nuovi e fruttiferi principii in quel ramo della scienza che partecipa dell' Algebra superiore e della Teoria dei numeri, e che venticinque anni prima era stato creato da Gauss. Il che viene confermato da una posteriore pubblicazione dello stesso Jacobi, nella quale è espressamente dichiarato che codesti principii furono in quel tempo comunicati per iscritto a Gauss.

Jacobi venne distolto dal proseguire cosiffatto argomento dalle sue ricerche sulle funzioni ellittiche, le quali dovevano bentosto procacciargli grande celebrità, e collocarlo tra i primi matematici del nostro tempo.

È cosa notabile che il giovane matematico che aveva tentato con successo varie teoriche, non fu sulle prime egualmente felice in questo campo. Uno dei suoi amici trovatolo un giorno pieno d'uggia, e richiestagliene la ragione, n'ebbe per risposta: Voi mi vedete sul punto di restituire alla Biblioteca questo libro (*Legendre*, *Exercices*, ec.), per il quale vedo che non mi aiuta la fortuna. Ogni qualvolta io mi son fatto a studiare altri libri più o meno importanti, sempre mi si sono svegliati nella mente pensieri propri e sempre qualche cosa vi ho guadagnato. Questa volta però ho acquistato nulla, e non mi é rampollata la minima idea.

Se questa volta i propri pensieri si fecero aspettare più dell'usato,però essi comparvero in copia maggiore;e tale che, con quelli contemporanei di Abel, ebbero per conseguenza una inaspettata esplicazione e la completa trasformazione di uno dei più importanti rami di Analisi.

Poichè il progresso venne qui contemporaneamente da due fonti diverse, è necessario esaminare simultaneamente le ricerche di Jacobi e quelle di Abel. Le scoperte di entrambi, in origine indipendenti le une dalle altre, si collegarono poscia fra loro in tal guisa, che l'esposizione delle une senza prendere in considerazione le altre non sarebbe facilmente intelligibile.

La teoria delle funzioni ellittiche, colla quale sono per sempre congiunti i nomi di Abel e di Jacòbi, non rimonta al di là della seconda metà del secolo precedente. Un matematico italiano di non comune penetrazione, il conte Fagnano degli Stati Ecclesiastici, fece la notevole scoperta, che l'integrale che esprime l'arco della curva, dai mate-

Digitized by Google

matici d'allora studiata molto sotto il nome di lemniscata, ha proprietà simili a quelle dell'integrale più semplice, che rappresenta un arco di cerchio. Così, p: e:, egli scopri che tra i limiti di due integrali di questa specie, di cui uno è uguale al doppio valore dell'altro, ha luogo una semplice relazione algebrica, in guisa che, un arco di lemniscata, comecchè trascendente di ordine superiore, pure può essere raddoppiato o diviso per metà mediante costruzioni geometriche, come un arco di cerchio. Eulero, qualche anno dopo, trovò la vera sorgente di queste ed altre proprietà simiglianti in un teorema, il quale va tra i più bei trovati di questo grande pensatore. Secondo questa proposizione di Eulero, un certo integrale, più generale di quello considerato da Fagnano, e che nell'odierna terminologia toglie nome d'integrale ellittico di prima specie, dipende in tal guisa dal suo limite, che due integrali di questa specie, con limiti arbitrarii, possono sempre essere riuniti in un terzo, il cui limite è dato in funzione dei primi, mediante una semplice relazione algebrica; al modo stesso che il seno di un arco composto di due parti può essere formato algebricamente coi seni delle sue parti. Ma l'integrale ellittico è più generale di quello che rappresenta un arco di cerchio. Ridotto alla sua forma più semplice, esso dipende non solo dal suo limite, ma anche da un' altra quantità contenuta nella funzione, cioè dal così detto *modulo*. Il teorema di Eulero stabilisce relazioni soltanto tra integrali dello stesso modulo. Il primo esempio di una relazione tra integrali di modulo differente, fu dato da posteriore scoperta fatta da Landen, e in forma alquanto diversa da Lagrange. Per questa scoperta un integrale ellittico può essere trasformato in altro integrale della stessa specie con una semplice sostituzione algebrica.

È gloria non peritura di Legendre di aver riconosciuto nelle menzionate scoperte un ramo importante di Analisi

e di avere atteso quasi tutta la vita ad elevare sopra questi fondamenti una teoria indipendente, che comprende tutti quegl'integrali, nei quali non è contenuta altra irrazionalità, tranne una radice quadrata, sotto la quale la variabile è di grado non superiore al quarto. Eulero aveva già osservato con quali modificazioni il suo teorema poteva applicarsi a tale specie d'integrali; Legendre partendo dal felice pensiero di ridurre tutti questi integrali a forme canoniche fisse, riuscì a questo che esse si riducono a tre specie affatto differenti fra loro; risultato di tanta importanza al perfezionamento della scienza. Nel sottoporre poscia ogni specie a diligente esame, egli scoprì molte delle loro più rilevanti proprietà, delle quali particolarmente quelle che appartengono alla terza specie, erano molto recondite ed ingombre da non poca difficoltà. Solo colla più tenace perseveranza, che persuase a questo gran matematico di ritornare più volte sullo stesso soggetto, potè egli vincere quelle difficoltà, le quali, riguardando alle condizioni della scienza in quel tempo, dovevano apparire quasi insuperabili.

La teoria, come la trovarono Abel e Jacobi, presentava parecchie deduzioni assai oscure, che non potevano chiarirsi coi principii allora conosciuti. Così, per menzionare una di coteste deduzioni, si era trovato che il grado dell'equazione formata con l'aiuto del teorema di Eulero, dalla cui soluzione dipende la divisione degl' integrali ellittici, non è uguale al numero delle parti come nell'analoga quistione della divisione del cerchio, ma al quadrato di questo numero. Il significato delle radici reali, il cui numero si accorda con quello, era manifesto; per contrario le numerose radici immaginarie dovevano apparire affatto inesplicabili. Ma prima di Abel e di Jacobi, a niuno cadde in mente che in ciò si occultasse un qualche segreto; e fu ad essi riserbato di maravigliarsi di questi e si-

mili risultati, la qual cosa nelle matematiche, come nelle altre scienze, è già una mezza scoperta.

Comunque la trasformazione della teorica delle funzioni ellittiche, dovuta ad Abel e a Jacobi, sia risultata dall'azione simultanea di parecchi pensieri che si aiutano reciprocamente, pure a due soltanto di questi pensieri sembra che debba attribuirsi maggiore importanza, essendo essi quelli che penetrano intimamente tutte le parti della nuova teoria. Mentre coloro che si erano precedentemente occupati di questo soggetto riguardavano l'integrale ellittico della prima specie come funzione del suo limite, Abel e Jacobi riconobbero, l'uno indipendentemente dall' altro, (benchè il primo alcuni mesi innanzi), la necessità di considerare per opposto come funzione dell'integrale il limite e due quantità che ne dipendono, le quali sono così strettemente unite ad esso come il seno al coseno; nel modo stesso che le più importanti proprietà delle trascendenti che dipendono dal cerchio si erano ottenute considerando il seno e il coseno come funzioni dell' arco, e non già questo come funzione di quelli.

Un secondo pensiero, comune a Jacobi e ad Abel, il pensiero cioè d'introdurre l'immaginario in questa teoria, fu di ancor maggiore importanza; e Jacobi poi spesso affermò che la sola introduzione delle quantità immaginarie ha sciolti tutti gli enigmi dell'antica teoria. Se vecchia esperienza non ci ammaestrasse che assai di sovente ci apparisce ultimo quello che a noi è più da presso, dovrebbe sembrarci straordinario che un siffatto pensiero fosse sfuggito ad Eulero, fra i più bei trovati del quale si novera quello di aver condotta la teoria delle funzioni circolari, trattandole come grandezze esponenziali immaginarie, a tal grado di semplicità e di estensione, che quasi tutta l' Analisi n' ebbe a sperimentare una trasformazione essenziale.

Mentre Abel e Jacobi introducevano l'immaginario nelle funzioni summentovate, ottenute per via della trasformazione dell'integrale ellittico di prima specie, e dette esclusivamente funzioni ellittiche, secondo l'odierna terminologia, riconobbero che tali funzioni partecipano della natura delle funzioni circolari, ed insieme di quelle delle esponenziali, sì che mentre le prime sono periodiche solo per valori reali dell'argomento e le ultime solo per valori immaginarii, le funzioni ellittiche riuniscono in se entrambe le specie di periodicità.

Postisi sopra un nuovo terreno per virtù di questo concetto fondamentale, Abel e Jacobi rivolsero le loro ricerche verso due differenti regioni della teoria. Abel mirò al problema che ha per oggetto la moltiplicazione e divisione degl'integrali ellittici; e mentre con l'aiuto del principio del doppio periodo penetrava bene addentro nella natura delle radici dell'equazione da cui la divisione dipende, giungeva alla scoperta affatto inaspettata, che la divisione generale dell'integrale ellittico, con limite arbitrario, può essere effettuata sempre algebricamente, cioè per via di semplici estrazioni di radice, ogni qualvolta si presupponga già eseguita la divisione particolare del così detto integrale completo. Questa divisione particolare sembra possibile solamente per moduli speciali, fra i quali il più semplice è quello che corrisponde alla lemniscata. Nel dare la soluzione del problema per questo caso speciale, egli mostrò che la divisione dell'intera lemniscata è al tutto analoga a quella del cerchio, e può essere effettuata per via di una costruzione geometrica negli stessi casi in cui essa divisione è possibile pel cerchio, secondo la bella teoria data 25 anni prima da Gauss.

Intorno a quest'ultimo lavoro di Abel è a richiamarsi una singolarità storica degna di menzione. Nell'introduzione all' ultima sezione delle « *Disq. arith.* », consacrata alla di-

Digitized by Google

visione del cerchio, Gauss aveva osservato, di passaggio, che lo stesso principio, su cui poggia la divisione del cerchio, è applicabile altresì a quella della lemniscata. Infatti la Memoria di Abel sulla divisione della lemniscata è fondata essenzialmente sul principio di Gauss, secondo il quale le radici dell'equazione da risolvere debbono disporsi in un circolo, sì che ciascuna dipenda dalla precedente alla stessa maniera. Ma se, per la divisione del cerchio, le proprietà già note delle funzioni trigonometriche bastavano per disporre le radici secondo il principio di Gauss, nel caso della lemniscata era necessario, non che alla disposizione al riconoscerne la sola possibilità, di penetrare molto addentro nella natura delle radici; il che soltanto per virtù del principio della doppia periodicità poteva ottenersi. La qual cosa, mercè codesta Memoria di Abel, forma per Gauss una testimonianza solenne come egli, andando innanzi al suo tempo, avesse già fin dal cominciare del secolo, riconosciuto il principio del doppio periodo. Tuttavia siffatta testimonianza, essendo emersa soltanto dai posteriori lavori di Abel, non menoma in niun modo il dritto di questi e di Jacobi a tale trovato.

Le ricerche di Abel, oltre i già menzionati risultati relativi alla divisione, ebbero ancora per conseguenza un'altra scoperta, non meno importante. Ponendo eguale all'infinito il moltiplicatore che si presenta nelle formole per via delle quali egli aveva rappresentate le funzioni ellittiche di un argomento multiplo mercè le funzioni dell'argomento semplice, egli ottenne espressioni di sommo rilievo per le funzioni ellittiche in forma di serie infinite, come pure di quozienti di prodotti infiniti. La qual scoperta è per l'analisi di ancora maggior momento che non la risolubilità algebrica dell'equazioni per la divisione indicata dal medesimo Abel.

Al tempo stesso che Abel proseguiva queste belle ricer-

che, Jacobi travagliavasi intorno ad altre parti dello stesso soggetto, di non minore rilievo. La sostituzione ricordata di sopra, per la quale un integrale ellittico si trasforma in un altro della stessa forma, era sin'allora l'unica della sua specie. A dir vero Legendre, non molto prima del tempo in cui Jacobi rivolse la mente intorno a questo soggetto, aveva trovato una seconda trasformazine dell'integrale ellittico; ma questa seconda trasformazione, che a lui parve ultima, non era conosciuta in Germania, e quindi non altrimenti che per una rara acutezza di mente potevasi dedurre da un anello visibile l'esistenza di una catena infinita, e richiedevasi grande ardimento per proporsi a problema la disamina della natura di cotesta catena.

Una induzione felice, nella quale ebbe parte principale il sottile e affatto nuovo pensiero di considerare la trasformazione e la moltiplicazione da un comune punto di vista, e l'ultima come caso speciale della prima, condusse Jacobi a presentire che funzioni razionali di ogni grado sieno atte a trasformare un integrale ellittico in un integrale della stessa forma. E ciò venne subito confermato dal fatto che il numero dei coefficienti arbitrarii, dei quali si poteva disporre per ogni grado, bastava per soddisfare a tutte le condizioni necessarie affinchè l'integrale trasformato fosse di forma analoga al primitivo. Ma comecchè una così semplice maniera di considerare la quistione, non potesse lasciar dubbio sulla possibilità della cosa, restava pur sempre a fare un gran passo per riconoscere l'intima natura analitica dell'espressione fratta appropriata alla trasformazione. Di qual specie fossero le difficoltà da vincere, e per via di quali ingegnose considerazioni Jacobi le vincesse, non può essere qui dichiarato; come pure non mi è consentito enumerare le importanti conseguenze che risultavano dal problema compiutamente risoluto. Fo menzione soltanto del risultato notevole di siffatta ricerca; cioè che la mol-

tiplicazione può essere composta sempre di due trasformazioni.

Mentre Abel e Jacobi a questo modo venivano perfezionando contemporaneamente la teoria per due diverse direzioni, sembrava che la fortuna volesse compartire eguale ai due giovani emuli l'onore del progresso; perocchè il modo onde uno mandava innanzi il trovato dell'altro, sì tosto ch'era noto, non lascia dubbio che ciascuno di essi avrebbe da se solo compiuto l' intero progresso se l' altro non lo avesse preceduto in una parte del lavoro.

Jacobi nelle sue ricerche aveva preso le mosse dalla supposizione che nella trasformazione la variabile primitiva fosse espressa razionalmente per via della nuova. Abel svolse il problema nella ipotesi più generale che tra le due variabili abbia luogo una qualche equazione algebrica , e riuscì al risultato che il problema, portato a tal grado di generalità, può sempre essere ridotto al caso speciale da Jacobi così compiutamente esaminato.

Con non minore successo Jacobi entrò a trattare la teorica della divisione generale data da Abel. La maniera colla quale Abel aveva risoluto il problema , mostrava , a dir vero, che le radici sono sempre esprimibili algebricamente, ma per l'effettiva rappresentazione delle stesse esigeva la formazione di certe relazioni simmetriche delle radici, la quale poteva conseguirsi solo in ciascun caso particolare. Jacobi da un nuovo principio, che bentosto saremo per accennare, dedusse l'espressione definitiva delle radici accomodata ad ogni grado, e formata immediatamente dai dati del problema; e questa espressione ha su quella di Abel eziandio il vantaggio di una forma molto più semplice. Jacobi sperò sorprendere Abel con questo risultato che perfezionava la soluzione del problema della divisione e ch'egli fece di pubblica ragione in una breve Nota: ma questa speranza restò delusa. Abel era morto, nell'età di anni 27, cioè circa due

anni dopo la pubblicazione del suo primo lavoro sulle funzioni ellittiche. La morte aveva sì presto troncata la splendida carriera di questo intelletto vasto e profondo!

Le ricerche posteriori di Jacobi sulle trascendenti ellittiche, come anche l'ultima testè menzionata, traggono origine da un pensiero al quale, per i suoi risultamenti, deve forse assegnarsi il primo posto fra i concetti di lui. Questo pensiero fu d'introdurre nell'Analisi, come trascendente indipendente, i prodotti infiniti, per i cui quozienti, Abel aveva espresso le funzioni ellittiche. Quando gli riuscì di porre sotto forma di serie cotesti prodotti, che del resto vanno considerati tutti di natura identica e casi particolari di *una sola* trascendente, egli riconobbe una funzione presentatasi già ai geometri francesi nelle ricerche di Fisica matematica. Però mentre quì la detta funzione era stata quasi negletta e solo una delle sue proprietà era stata avvertita, Jacobi la sottopose ad un profondo esame, ne riconobbe la natura analitica e la introdusse nella teoria degl' integrali di seconda e terza specie. La qual cosa ebbe per effetto non solo la cognizione della già nota, ma isolata proprietà dell'intimo legame di quest' integrali, ma anche la rilevante scoperta che gl' integrali di terza specie dipendenti da tre elementi, possono essere espressi per via della nuova trascendente che ne contiene solamente due.

Jacobi, nelle sue lezioni, soleva torre a fondamento dell'intera teorica la considerazione di questa funzione; lo che non solo apportò grande semplicità e chiarezza nell'esposizione di questo soggetto, ma offrì ancora un modello ad altre ricerche posteriori che saranno da noi discorse più sotto.

E niuno vorrà rifiutare a questa funzione il primo grado dopo le trascendenti elementari già da lungo tempo accettate nella scienza, ove si rifletta a queste tre cose; cioè ch'essa domina tutta la teorica delle trascendenti ellittiche; che Jacobi ha dedotto dalle proprietà di quella, importanti teo-

remi della più alta aritmetica; e infine che essa stessa ha parte principale in molte applicazioni, fra le quali ricorderemo solamente la rappresentazione del moto di rotazione data per via di questa trascendente, ch'è uno degli ultimi e più bei lavori di Jacobi. È singolare che una funzione di tanto momento, non abbia ancora altro nome se non quello della trascendente Θ, datole per caso dallo stesso Jacobi nei suoi primi lavori. Onde i matematici adempirebbero ad un dovere di riconoscenza, se si accordassero a mutarlo in quello dell'illustre matematico, per onorare la memoria dell'uomo fra le cui scoperte più belle è da noverarsi quella di avere primo riconosciuta la natura e l'alta importanza di cotesta trascendente.

I menzionati lavori di Abel non sono gli unici nè i più rilevanti fra quelli di cui la scienza va debitrice a questo eminente matematico. La sua maggiore scoperta è contenuta in una proposizione, che porta il suo nome, improntata del suo straordinario intelletto, di cui la proprietà speciale si era di trattare le quistioni scientifiche abbracciandole nella loro più vasta generalità.

Il teorema di Eulero, di che abbiamo sopra favellato — io parlo quì del teorema considerato come principio, e non già delle conseguenze che se ne sono dedotte, le quali di giorno in giorno più si vengono esplicando — formava allora, nel giro del dominio a cui appartiene, il limite della scienza , e per varcarlo invano si erano affaticati Eulero stesso, Lagrange e altri predecessori di Abel. Quale ammirazione deve quindi produrre una scoperta che, comprendendo gl'integrali di qualunque funzione algebrica, ne rivelava la proprietà fondamentale ?

Legendre chiama il teorema di Abel un *monumentum aere perennius*, e Jacobi nota « come esso esprima in semplici forme, e senza apparato di calcolo, i pensieri matematici più profondi e più vasti; e fosse la maggiore sco-

perta matematica dei nostri tempi, comunque tutta la sua importanza non possa venire resa manifesta che soltanto da un nuovo e grande lavoro, forse ancora lontano. »

Questo lavoro è già cominciato, e Jacobi ne ha avuto la parte principale.

Il pensiero di considerare negl'integrali abeliani le funzioni inverse, come con tanto successo si era fatto per gl' integrali ellittici, apparve ben presto ineseguibile e complicato di inestricabile contradizione. Ed invero Jacobi riconobbe subito che queste funzioni inverse dovevano avere quattro periodi e ancora più ; quando è noto che una funzione analitica uniforme e continua allorchè non passa per l'infinito, come le funzioni ellittiche e circolari , ammette due soli periodi. Anche qui un nuovo e recondito pensiero richiedevasi, perchè il teorema di Abel non restasse infecondo, e perchè divenisse il fondamento di una grande teoria analitica.

Jacobi, dopo essersi per più anni affaticato intorno a questo soggetto ed averlo esaminato per tutti gli aspetti, trovò finalmente la soluzione dell'enigma nell'osservazione che in questo caso debbono considerarsi contemporaneamente quattro o più integrali, dai quali, per via d'inversioni, vanno dedotte due o più funzioni di un egual numero di argomenti. Egli fece nota questa divinazione in una Memoria di dieci pagine, alla quale, due anni dopo, ne venne dietro una più vasta, in cui appariva nella sua più chiara luce la natura analitica di queste funzioni inverse.

Comunque la rappresentazione di queste funzioni , trovata posteriormente, non appartenga a Jacobi , ma a due matematici più giovani di non comune ingegno, tuttavia io debbo far menzione di questo importante progresso, da che l'influsso di Jacobi vi apparisce evidente. GOEPEL e ROSENHAIN , togliendo a modello la sopraccennata seconda trattazione della teoria delle funzioni ellittiche, hanno posto a

fondamento dei loro bei lavori la considerazione delle serie infinite, la cui legge di formazione è più generale, ma della stessa natura di quella della serie per la quale viene espressa la funzione Jacobiana.

Benchè nell'esposizione delle scoperte di Jacobi, nel campo delle trascendenti ellittiche ed abeliane, io mi sia ristretto a rilevare le cose più culminanti, tuttavia essa è riuscita così ampia che mi è forza riassumere qui brevemente le altre investigazioni di Jacobi, trascurando molti lavori concernenti solo quistioni speciali e intesi al perfezionamento delle particolarità della scienza.

Abbiamo già innanzi mentovato, come appartenente ai primi lavori del Jacobi, le ricerche di lui sulla divisione del cerchio e l'applicazione di questa all'alta Aritmetica. In cosiffatte ricerche, a cui egli pose a fondamento la forma, che Lagrange aveva dato alla soluzione dell'equazioni binomie, già trovata pel primo da Gauss, s'incontrò in alcuni risultati col gran matematico Cauchy, il quale occupavasi contemporaneamente di simili ricerche. E quando questi, durante il primo soggiorno di Jacobi in Parigi, pubblicò un estratto dei suoi lavori, fece di ciò speciale ricordanza.

Cauchy dalla divisione del cerchio aveva dedotto questo bel teorema; tutti i numeri primi che divisi per un dato numero primo o per il quadruplo dello stesso, danno per resto l'unità, elevati ad una data potenza il cui esponente dipende semplicemente dall'ultimo numero primo, vengono rappresentati per via della così detta forma quadratica principale, che ha per *determinante* il dato numero primo preso negativamente. Or Jacobi ricavò da questo teorema il presentimento che quell'esponente debba accordarsi col numero delle forme quadratiche, diverse le une dalle altre, che corrispondono al menzionato *determinante*. E poichè questo presentimento si confermò in tutti gli esempi numerici, così egli non ebbe difficoltà a pubblicare questa osserva-

Digitized by Google

zione in una breve Nota. Io mi son creduto in debito, dopo la verbale comunicazione che a me ne fece lo stesso Jacobi, di menzionare, come esempio di sagace induzione, l'origine rimasta sinora ignota di questo risultato; benchè la dimostrazione esatta dello stesso non sembra poter essere fondata sulla divisione del cerchio, ma esigere principii affatto diversi, tolti al calcolo integrale e alla teoria delle serie, i quali sono stati posteriormente introdotti nella scienza.

Aveva Gauss, nel 1832, pubblicato una seconda Memoria sopra i resti biquadratici; la quale levò grido pel profondo pensiero di trattare i numeri interi complessi nell' Aritmetica superiore, alla stessa guisa che i numeri reali, e per la legge di reciprocità ivi stabilita, e che ha luogo nella teoria dei resti biquadratici tra due numeri complessi. Or siffatta Memoria porse occasione a Jacobi di riprendere le sue precedenti ricerche, e gli riuscì di dedurre con grande semplicità dalla divisione del cerchio non solo il bel teorema di Gauss, già mentovato, ma ancora altro simile che si riferisce ai resti cubici.

Benchè le dette ricerche ed altre che vi hanno relazione, delle quali a me non è dato indicare neppure il titolo, fossero da Jacobi completamente scritte negli anni 1836-39, pure egli non si seppe risolvere mai a farle di pubblica ragione. La sua esitazione nasceva dal desiderio di rendere più generali taluni risultati; al che egli non ha trovato agio sufficiente, occupato com'era in tanti altri lavori. Una parte delle sue indagini, e particolarmente la dimostrazione, già accennata, della legge di reciprocità sono pervenute a cognizione di alcuni matematici tedeschi per mezzo delle lezioni stenografate sulla divisione del cerchio e la sua applicazione alla teoria dei numeri, che egli tenne a Koenisberg nell'inverno 1836-37.

Un'altra ricchissima sorgente per l'Aritmetica superiore

Jacobi ha trovato nella teoria delle funzioni ellittiche, dalla quale ha dedotto varii bei teoremi, di cui taluni hanno per oggetto di mostrare in quante maniere uno stesso numero può decomporsi in 2, 4, 6 e 8 quadrati; ed altri riguardano i numeri che sono contenuti simultaneamente in più forme quadratiche. Questi rilevanti acquisti della scienza sono un frutto della soprammentovata introduzione della funzione Jacobiana nella teoria delle trascendenti ellittiche.

Jacobi si è più volte occupato della determinazione e riduzione degl'integrali doppi e multipli. Piacemi qui in specialità ricordare il semplice metodo per via del quale egli riduce la determinazione della superficie di una ellissoide ad assi ineguali agl'integrali ellittici di prima e seconda specie; riduzione che Legendre, di cui è una delle più belle scoperte, aveva conseguito giovandosi di proprietà molto recondite degl'integrali di terza specie. In un'altra Memoria Jacobi estese agl'integrali doppi il teorema di addizione di Eulero, e poco appresso osservò che di simile estensione è anche capace il teorema di Abel.

Soltanto una parte dei lavori di Jacobi intorno a questo ramo del Calcolo integrale è stata pubblicata. Una estesa Memoria sull'attrazione dell'ellissoide, benchè da lungo tempo quasi compiuta, è sinora restata inedita e conosciuta solo per via di accidentali comunicazioni. Nell'intendere a questo problema, gli venne fatto trovare il bel teorema, già ottenuto contemporaneamente da Poisson, in virtù del quale l'attrazione di uno strato infinitamente sottile, limitato da due ellissoidi concentriche ed omotetiche, sopra un punto esteriore, può conseguirsi senza segno integrale. Jacobi non fece mai pubblica menzione di questa circostanza, non ostante che avrebbe potuto benissimo invocare la testimonianza di parecchi matematici, ai quali aveva già comunicato il teorema, innanzi che fosse comparso il primo annunzio della Memoria di Poisson.

Alle già esposte ricerche si unisce un altro lavoro di Jacobi, il quale, a causa dei suoi sorprendenti risultati, non può passare qui inosservato. Maclaurin, come è noto , ha per il primo dimostrato il seguente teorema : la figura di equilibrio di una massa liquida omogenea, animata da un moto di rotazione uniforme intorno ad un asse fisso, e di cui le molecole si attirano l'un l'altra con una forza reciprocamente proporzionale ai quadrati delle distanze, è quella di una ellissoide di rivoluzione, se tale è la forma primitiva della massa fluida. D'Alembert e Laplace completarono questo bel risultamento, dimostrando che a ciascun valore della velocità angolare di rotazione, ch'è al disotto di un certo limite, corrispondono due sole figure di equilibrio , le quali sono tutte e due comprese fra le ellissoidi di rivoluzione. Lagrange sembra essere stato il primo che abbia presentito la possibilità che anche una ellissoide a tre assi ineguali possa soddisfare alle condizioni di equilibrio ; almeno questo gran matematico trattando siffatto problema, nella sua Meccanica analitica, parte da formole che valgonò per una ellissoide qualunque. Ma dalle due equazioni ottenute a questa guisa, e nelle quali i due assi equatoriali sono contenuti simmetricamente , egli stimò poter dedurre, come conseguenza di questa simmetria, che quegli assi *debbono* essere eguali, mentre ciò permetteva solo si affermasse che essi *possono* essere eguali, nel qual caso le due equazioni si riducono ad una, che si accorda con quella trovata prima da Maclaurin e discussa da d'Alembert e da Laplace.

L'autore di un noto trattato, che, seguendo nell'esposizione di questo soggetto le tracce di Lagrange, accompagnava l'accennata conchiusione con la parola *necessariamente*, risvegliò prima il dubbio di Jacobi; il quale, considerando più da vicino e con maggiore esattezza quelle due equazioni, trovò bentosto, a grande maraviglia sua e certo di

tutti i matematici, che anche una ellissoide a tre assi ineguali può soddisfare alle condizioni di equilibrio.

Le ricerche intorno all'attrazione dell'ellissoide indussero Jacobi a volgere la sua attenzione sulle superficie di secondo grado; e dobbiamo a questa occasione la conoscenza di parecchie interessanti proprietà e una genesi elegantissima di queste superficie. I limiti a me imposti mi sforzano a restringermi a questo annunzio, e ad indicare i rimanenti lavori di Jacobi intorno alla Geometria solo pel titolo. Quindi io nomino soltanto la Memoria sopra un problema di Geometria elementare, che prima di lui era stato trattato in casi particolari, e la cui compiuta soluzione egli deduce dalla teoria delle trascendenti ellittiche; le sue ricerche sul numero delle tangenti doppie delle curve algebriche; ed alcune piccole Memorie, nelle quali, per via puramente sintetica e con grande semplicità, egli dimostra alcuni teoremi sulla curvatura delle superficie e sulle linee geodetiche.

Fra le ricerche di maggiore momento di Jacobi debbono noverarsi quelle sulla Meccanica analitica. Hamilton aveva fatto la scoperta notevole che l'integrazione dell'equazioni differenziali della Meccanica, si può sempre ridurre alla soluzione di due equazioni simultanee a differenze parziali; ma questa scoperta, comunque dovesse apparir degna di osservazione, rimase infeconda sino a che Jacobi non la liberò da una inutile complicazione, mostrando che la soluzione da trovare bastava soddisfacesse ad una sola delle due equazioni a differenze parziali. Per citare una fra le numerose applicazioni di questa teoria, portata a siffatto grado di semplicità, diremo com'egli trattasse il problema, ancora non risoluto, di determinare la linea geodetica sopra un'ellissoide a tre assi ineguali; e come, giovandosi di un istrumento analitico, già prima nelle sue mani manifestatosi efficacissimo, e che ora va sotto il nome di coordi-

nate ellittiche, gli riuscisse integrare quella equazione a differenze parziali, e dare l'equazione della linea geodetica sotto la forma di una relazione tra due integrali abeliani. Questa scoperta di Jacobi è divenuta la base di uno dei più bei capitoli della geometria superiore, che matematici tedeschi, francesi e inglesi hanno rivaleggiato a perfezionare.

Il legame che abbiamo indicato esistere tra un sistema di equazioni differenziali ordinarie ed *una sola* equazione a differenze parziali, condusse Jacobi a riprendere lo studio della teoria dell'equazioni a differenze parziali, della quale egli si era occupato in una delle sue prime Memorie sul metodo di Pfaff. Questo geometra aveva trovato che per integrare una equazione a differenze parziali qualunque con un numero qualsivoglia di variabili, bisognava integrare completamente una serie di sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Jacobi traendo profitto dal legame suaccennato, mostrò come l'integrazione del *primo* dei sistemi considerato da Pfaff era sufficiente per l'oggetto.

Della stessa natura è il perfezionamento, che il Calcolo delle Variazioni deve a Jacobi. È noto che l'annullamento della prima variazione è condizione *necessaria* ma non *sufficiente* dell'esistenza di un massimo o di un minimo e che solo dalla natura della seconda variazione si può dedurre un criterio per giudicare se ha luogo un massimo un minimo ovvero nè l'uno nè l' altro. La teoria come la trovò Jacobi richiedeva per la discussione della seconda variazione nuove integrazioni dopo quelle volute dall' annullamento della prima variazione; il geometra di Koenisberg mostrò che è sufficiente effettuare queste ultime integrazioni, poichè esse contengono le altre.

Se l'indirizzo sempre più manifesto dell'analisi moderna è di sostituire pensieri ai calcoli, vi ha nondimeno alcune parti nelle quali il calcolo ripiglia le sue ragioni. Jacobi, che a cosiffatto indirizzo ha tanto contribuito, fece da va-

Digitized by Google

lente ch'egli era nella parte tecnica, cose degne di ammirazione anche da questo lato. Il che è provato dalle sue Memorie sulla trasformazione delle funzioni omogenee di secondo grado; sull'eliminazione; sopra i valori simultanei che soddisfano ad un sistema di equazioni algebriche; sulla inversione delle serie e sulla teoria dei determinanti. E rispetto a quest'ultimo capo si deve a lui una compiuta teoria dell'espressioni ch'egli designò col nome di determinanti funzionali. Nel tener dietro all'analogia di queste espressioni coi coefficienti differenziali, egli riuscì ad un principio generale, che chiamò principio dell'ultimo moltiplicatore. Questo principio dà il mezzo di effettuare l'ultima integrazione in quasi tutti i problemi d'integrazione che si presentano nelle applicazioni, perchè somministra *a priori* il fattore integrante necessario.

L'efficacia che Jacobi esercitò sui progressi della scienza apparirebbe incompiuta, se io non parlassi di quella ch'ebbe nella qualità di pubblico maestro. Non era il suo ingegno fatto per ripetere quel che già altri aveva detto; onde le sue lezioni, tutt'altro che elementari, spaziavano soltanto per quelle parti della scienza , nelle quali egli stesso era stato creatore ; vale a dire offrivano ampia e ricca messe di svariate dottrine. Il suo insegnamento procedeva chiaro, non di quella chiarezza che spesso è anche comune a mezzano intelletto, ma bensì di una chiarezza di più alta specie. Innanzi tutto egli s'ingegnava ad esporre i pensieri direttivi , che sono fondamento di ogni teoria ; ed eliminando ogni artificio, conduceva la soluzione del problema per uno svolgimento così naturale, che nei suoi ascoltatori nasceva speranza di quasi poter creare qualche cosa di simile a quelle che udivano. Il modo facile ond' ei trattava i più difficili argomenti , davagli ragione di poter incoraggiare i suoi uditori, assicurandoli che essi avrebbero solamente a passare per una serie di pensieri affatto semplici.

Digitized by Google

Straordinario fu il successo di cosiffatto insegnamento, come mi sono ingegnato ritrarlo e come solamente uno spirito creatore può dare. Se oggidì in Germania la conoscenza dei metodi analitici è assai più diffusa che non per lo addietro, se gran numero di giovani matematici ampliano ed arricchiscono la scienza per tutti gli aspetti, Jacobi ha parte principale a questo felice risultato. Quasi tutti sono stati suoi scolari; fu raro che gl'ingegni che venivano nascendo sfuggissero alla sua attenzione ; a niuno che fosse da lui conosciuto, è mancato il suo consiglio e la sua sollecitudine incoraggiante.

Io mi sono sforzato sinora di rappresentare Jacobi come insigne scopritore ed efficace maestro. Se io mi facessi ora a ritrarlo quale egli appariva fuori il giro delle materie scientifiche a coloro che non coltivano le discipline matematiche, io debbo far notare come fosse fondamento di sua natura il vivere interamente nel mondo del pensiero ; e come questo fosse divenuto per lui uno stato abituale e quasi seconda natura , mentre per la maggior parte degli uomini anche insigni esige uno sforzo particolare. Se talora qualche cosa nella vita o nella scienza veniva a svegliare la sua attenzione, egli non riposava, in sino a che non l' avesse ridotta a pensiero proprio. All' operosità intellettuale più instancabile accoppiava così rara memoria, che tutte le cose ond'erasi una volta occupato, egli poteva subito richiamare alla mente, e volgerle a profitto.

Il ricco patrimonio di scienza e di pensieri propri che continuamente era a disposizione di Jacobi, una singolare versatilità d' ingegno ond'ei sapeva adattarsi a qualunque età e qualunque intelligenza, e una maniera di esprimersi arguta e faceta, attiravano al gran matematico, anche nel conversare, insolita considerazione; la quale veniva anche accresciuta dalla sollecitudine con che accondiscendeva a trattare quistioni scientifiche all'improvviso. E questa sol-

Digitized by Google

lecitudine moveva dalla natura stessa della sua mente, che trovava particolare soddisfazione nel vincere le difficoltà, e quindi piacevasi del rendere altrui intelligibili, con semplici ed accomodate considerazioni, le quistioni scientifiche. E per fare a questo modo gli faceva solamente mestieri di avere la convinzione che quelli coi quali s' intratteneva, stessero con tutto l'animo rivolti alle cose che diceva. Che se al contrario gli paresse osservare non più che una spensierata curiosità, o sivvero udisse manifestare con sussiego opinioni recise da tali che giammai si erano creduti nell'obbligo di coltivare il proprio spirito, allora la pazienza gli veniva meno, ed avea costume di troncare la conversazione con una qualche osservazione ironica, e talora anco mordace. Molti hanno fatto rimprovero a Jacobi dell'avere ostentato troppo, in tali emergenze, la coscienza delle sue forze intellettuali; ma quelli che così lo giudicarono avrebbero forse mutato parere se avessero saputo il prezzo col quale egli aveva acquistato il dritto di avere una tal coscienza di se stesso. Una lettera del 1824, quando Jacobi, ancora affatto sconosciuto, non poteva avere alcuno interesse a ritrarre le sue lotte intellettuali con colori esagerati, contiene i seguenti brani, che io comunico qui testualmente per rendere completo il ritratto di questo uomo straordinario. Jacobi, allora ventenne, si occupava da circa un anno quasi esclusivamente di studii matematici.

» É un aspro lavoro quello che io ho fatto, è un aspro lavoro quello del quale io sono occupato. La diligenza e la memoria non valgono quì sole per condurre alla meta; esse sono serve subordinate alla mente che medita. Ma questa meditazione ostinata che travaglia il cervello, richiede maggior forza di qualunque altro studio assiduo e durevole. Perciò se un continno esercizio di questa facoltà mi ha fatto conseguire un certo grado di forza, non si creda che d' alcun felice dono di natura io n' ebbi agevolata la via.

Aspre, assai aspre fatiche mi è toccato sostenere, e l' angoscia del pensiero ha fortemente più d' una fiata scosso la mia salute. A dir vero la coscienza delle forze ottenute dà la più bella ricompensa del lavoro , e quello incoraggiamento ch' é necessario a perseverare e non venir meno. Uomini senza pensiero , ai quali cotesto lavoro e cotesta coscienza son cose affatto ignote, cercano vilipendere questa consolazione , che sola può non farci cadere l' animo traverso al difficile cammino , rendendo odiosa col nome di presunzione o di arroganza quella coscienza che proviene dal sentirsi uno e libero (giacchè solo nel moto del pensiero l'uomo è libero e con se). Quando l'uomo sente di avere in sè l'idea di una scienza, non può pregiare se non le cose in cui vede il riflesso del suo spirito. Conforme a questa misura è naturale che a lui appaiano futili talune cose , che agli altri possono sembrare degnissime di lode. Così io sono stato spesso rimproverato di superbia, o lodato nel più bel modo, da chi ha creduto enunciare a mio carico un biasimo, mostrandomi altero verso tutto ciò ch'è al disotto di me, e umile solamente verso ciò ch'è più alto. Ma quella scala infinita che nel mondo si vede e in sè e fuori di se, impedisce la stima esagerata di noi stessi col metterci sot-t'occhio sempre presente da una parte uno scopo infinito e dall' altra il limite delle proprie forze. Io voglio sempre sforzarmi a perseverare in cosiffatta alterigia ed in cosiffatta umiltà, anzi desidero essere sempre più altero e sempre più umile. »

Jacobi ha mostrato nelle più difficili emergenze della sua vita, che non usava una semplice frase, quando ei diceva apprezzare le cose in quanto fossero il riflesso dell'umano pensiero , e tuttociò che al regno di questo non toccasse lui riguardare con disdegno, o almeno con indifferenza. La qual veramente filosofica indifferenza si manifestò nel modo più degno di ammirazione quando fu colpito dalla sven-

tura di dover perdere tutta l'eredità paterna; perdita che avrebbe dovuto riuscirgli pur dolorosa, tanto più che, già sposato da 10 anni, aveva a sostenere la cura di numerosa famiglia. Chi lo vide allora volare presso la madre e confortarla dei suoi consigli e dell'opera sua, non potè accorgersi del minimo cambiamento nel tenore abituale dell'indole sua. Egli parlava con lo stesso calore di prima delle cose scientifiche , e di ciò solo si lagnava che il viaggio inaspettato gli avesse impedito di proseguire una ricerca, intorno alla quale era allora fortemente occupato.

Ho già detto come in Jacobi si manifestasse il culto del pensiero, in occasione della grande scoperta di Abel. Simile disposizione egli mostrava per tuttociò che aveva importanza intellettuale ; onde a lui non va applicato quel detto di un antico scrittore, che gli uomini ammirino veramente quel solo che essi credono di poter fare. Al contrario Jacobi estendeva le manifestazioni della sua riconoscenza in tutto il giro del campo speculativo, e nella scienza stessa ch'ei professava i trovati altrui gli cagionavano letizia tanto maggiore qnanto più per la loro impronta distinguevansi dalle creazioni proprie di lui. Era in tal caso sua natural maniera di esprimere la propria approvazione, confessando che mai gli si sarebbe affacciato alla mente quel pensiero.

Mi resta adesso a completare qnello che ho menzionato di sopra sulle relazioni esteriori della vita di Jacobi.

Quando egli cominciò a far note le sue ricerche sulle funzioni ellittiche , era ancora professore particolare ; ma l'ammirazione che le sue scoperte risvegliarono nei giudici competenti, ebbe per conseguenza di portarlo ben tosto al grado di professore straordinario e poco appresso a quello di professore ordinario.

Nel parlare dell'accoglienza che le scoperte di Abel e di Jacobi - i cui nomi sono qui inseparabili - trovarono presso

tutti i matematici contemporanei, io non posso astenermi dal fare speciale ricordo dell'uomo, che per le meditazioni di molti anni, era giudice veramente autorevole a poter apprezzare l'inaspettato progresso in tutta la sua importanza. Legendre, che più di una volta accusò i suoi contemporanei d'indifferenza, e che poco innanzi aveva mosso lamento dell'abbandono in cui gli altri avevano lasciato la sua scienza favorita, credeva averla compiuta da se solo dopo quaranta anni di lavoro. Tuttavia egli applaudì alle scoperte di Abel e di Jacobi, che portavano quella teoria molto al di là dei limiti che a lui parevano posti dalla natura stessa del soggetto, in modo così sincero e così fervido, che è difficile a dire se tornasse più ad onore dei due giovani matematici ai quali veniva da lui tributato in sul principio della loro carriera, ovvero al nobile e vecchio maestro, che, giunto quasi all'estremo degli anni, mostravasi capace di tanto calore di sentimento.

Altro contrassegno non meno onorevole fu quello dell'Accademia di Parigi. Benchè ella non avesse aperto concorso alcuno sulla teoria delle funzioni ellittiche, tuttavia volle assegnare uno dei suoi grandi premi matematici ai lavori di Abel e di Jacobi, come alle più importanti scoperte del tempo; e lo divise fra Jacobi e gli eredi di Abel.

Quanto alle prove di ossequio e di stima che Jacobi si ebbe fin dall'entrare nella carriera scientifica, dirò solamente che i confini in cui debbo tenermi non mi permettono di accennare nemmeno tutte quelle che gli furon date più tardi in larga misura; non potendo la menzione di esse trovar luogo che soltanto in una ampia biografia.

Jacobi fece il suo primo viaggio nell'anno 1829 dopo aver pubblicate le sue « FUNDAMENTA NOVA THEORIAE FUNCT. ELLIPT. », che contengono solamente una parte delle sue ricerche sopra questo soggetto. Andò da prima a Gottinga per conoscere personalmente Gauss; di là mosse per Pa-

rigi, ove si trattenne parecchi mesi. Erano quivi riuniti in quel tempo, oltre Legendre (col quale Jacobi stava già da più anni in commercio epistolare, e pel quale aveva sempre sentito affetto grande), anche Fourier, Poisson ed altri matematici eminenti, sopravvissuti poscia all' uomo illustre di cui teniamo discorso.

Un secondo viaggio imprendeva Jacobi nel 1842 in compagnia di sua moglie, donna di merito eminente, alla quale erasi unito dopo il 1831. L'occasione di questo viaggio fu per lui troppo onorevole perchè io [illegible] potessi passarla sotto silenzio. All' illuminato uomo di Stato che allora presedeva l' amministrazione nella Provincia di Prussia, parve opportuno, nell'interesse della scienza, che Bessel e Jacobi si arrendessero finalmente all'invito già più volte replicato, di assistere al Congresso dei dotti, che ogni anno ha luogo in Inghilterra; onde egli ne fece pratica presso al Re, per ottenere l'approvazione delle spese di un tal viaggio; pratica che da S. M. con reale munificenza fu esaudita ed accordata.

Non guari dopo il suo ritorno da questo viaggio si mostrarono in Jacobi i sintomi di una malattia sventuratamente incurabile. Egli versò per lungo tempo in pericolo grande; e quando finalmente questo fu pel momento potuto allontanare, i suoi medici riconobbero che indispensabile alla sua salute fosse il soggiornare per qualche tempo sotto un clima meridionale. La qual circostanza inquietava non poco Jacobi. Ma questa sua inquietudine non fu di lunga durata; perocchè non sì tosto siffatta condizione di cose fu portata dal nostro Collega *Alessandro di Humboldt* (la cui potente mediazione non manca mai quando ne va dell'onore della scienza e del bene dei snoi cultori) a conoscenza del Re, già con un nuovo atto di reale magnanimità decretavasi a favore dell'illustre infermo una considerevole somma per un viaggio in Italia.

Digitized by Google

Il dolce clima di Roma, ove Jacobi passò l'inverno, fu così salutare sopra di lui, che a quanti quivi lo videro offrivasi in tutt'altro aspetto che da convalescente. Durante il suo soggiorno di 5 mesi in quella città, egli, oltre parecchie piccole Memorie, che comparvero in un giornale scientifico di Roma stessa, scrisse una importante e lunga Memoria pel Giornale di Crelle, e per di più attese ancora a fare il confronto dei manoscritti di *Diofante* conservati nel Vaticano dei quali egli si era trascorsivamente occupato tempo innanzi.

Ritornato in patria egli fu mandato ad insegnare da Koenisberg a Berlino, ove il clima, relativamente più dolce, sembrava minacciar meno la sua salute. Senza appartenere all'Università, egli aveva l'obbligo di fare delle lezioni, ma solo con quei riguardi che gli erano imposti dallo stato di sua salute. Nel tempo del suo soggiorno in questa città fu scrittore non meno operoso di quello ch'erasi mostrato in Koenisberg, come ne fanno testimonianza le Memorie scritte nei sei anni che vi rimase, le quali riempiono due grossi volumi in quarto.

Nel principio dell'anno 1851 fu attaccato da Grippe; dal quale risanato in breve, ritornò al lavoro con molta alacrità, talchè agli amici suoi venne meno la speranza di conservarlo a sè ed alla scienza. Infatti all' 11 Febbraio subitamente ammalò. Il suo stato risvegliò grandi apprensioni; e quando, dopo alcuni giorni, si riconobbe che egli era preso da vaiuolo, di natura assai maligna, ogni luce di speranza affatto si dileguò. Il 18 Febbraio, a 11 ore della sera, otto giorni dopo che si era ammalato , egli soccombette.

La carriera scientifica di Jacobi abbraccia precisamente un quarto di secolo; picciol tempo se si ragguaglia a quello dei matematici insigni a lui anteriori, e appena la metà di quello in cui si era spiegata l'attività di Eulero; col quale egli aveva la più grande somiglianza, non solo per la va-

rietà e la fecondità, come anche per la cognizione di tutti i mezzi della scienza, dei quali poteva giovarsi semprecchè il volesse.

La morte che lo strappò così precocemente e subitamente al lavoro, nel pieno vigore delle sue forze intellettuali, ha privato la scienza delle grandi ricchezze che ancora poteva aspettarsi dall'attività instancabile di lui. In ciò dire io non guardo solamente alla supposizione che in uno spirito di tal tempera avesse la forza creativa a venir meno insieme colla fisica; ma io guardo ancora a quella serie di lavori quasi finiti, ai quali egli stesso in breve tempo (forse durante la stampa, come ei faceva sì volentieri nell'ultimo periodo di sua vita) avrebbe potuto porre l'ultima mano, e che ora per opera dei suoi amici debbono venire alla luce a guisa di frammenti in forma imperfetta. Anche nel corso della sua malattia, quattro giorni prima di morire, lamentavasi dell'avversa fortuna che aveva contrariato molti dei suoi maggiori lavori, interrotti ora dalla malattia, ora da domestiche sventure. Quand'io, aggiungeva egli con dolore, mi faceva a ripigliare più tardi il lavoro, erami più gradevole applicarmi a qualche cosa di nuovo, che ritornare sopra quelle ricerche, che svegliavano in me sì triste rimembranze. Ma veggo che ormai non debbo più indugiare a rendere pubblici quei vecchi lavori ai quali ho consacrato sì gran parte delle mie forze migliori, dovendo essi entrare fruttuosi e fecondi nel corso della scienza. Fortunatamente mi fa mestieri per questo di breve tempo, che a me, come spero, non vorrà mancare.

678359